

速率无损失的空间耦合 LDPC 码

张亚坤¹, 周 林^{1,2}, 陈 辰¹, 贺玉成^{1,2}

(1. 华侨大学厦门市移动多媒体通信重点实验室, 福建厦门 361021;

2. 西安电子科技大学综合业务网理论与关键技术国家重点实验室, 陕西西安 710071)

摘 要: 空间耦合 (spatially coupled) LDPC 码为通信系统提供了一种全新的接近容量限的方式, 但在耦合过程中需要额外添加校验节点, 因此存在一定的码率损失. 为了消除码率损失, 提出了一种新型的耦合方式, 首位置变量节点的边展开方式不变, 中间位置的边连接到前一个位置的校验节点并依次向后展开, 末位置的边与首位置的边成对称分布, 从而得到了一种无需添加额外校验节点, 码率无损失的 SC-LDPC 码变体结构. 在 AWGN 信道中通过外部信息转移 (extrinsic information transfer) 理论分析及误比特率性能仿真, 结果表明: 相对于 SC-LDPC 码的传统结构, 本文提出的 SC-LDPC 码变体结构在链长较短时不仅能避免码率损失, 并且具有更优的阈值和译码性能, 在未来通信系统中更具优势.

关键词: 空间耦合 LDPC 码; 消除码率损失; AWGN 信道; 外部信息转移; BP 译码

中图分类号: TP302 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2019)12-2590-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2019.12.019

Rate-Loss-Free Spatially Coupled LDPC Codes

ZHANG Ya-kun¹, ZHOU Lin^{1,2}, CHEN Chen¹, HE Yu-cheng^{1,2}

(1. The Xiamen Key Laboratory of Mobile Multimedia Communications, National Huaqiao University, Xiamen, Fujian 361021, China;

2. The State Key Laboratory of Integrated Services Networks, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract: Spatial coupled LDPC (SC-LDPC) code provides an entirely new way of approaching capacity for communication systems, however, a rate loss caused by additional check nodes during the coupling process. In order to eliminate rate loss, a coupling method was proposed. The edges expansion of the variable node in the first position were unchanged, and the edges of the middle position were connected backwards from the previous position check node, then the edges of the last position were symmetrically distributed with the edges in the first position. Therefore, a rate-loss-free SC-LDPC code was designed without added addition check nodes. Extrinsic information transfer (EXIT) theoretical analysis and bit error rate performance simulation were adopted in the AWGN channel. It is showed the SC-LDPC variant structure is superior to the traditional structure with a shorter coupling chain length, not only can the rate loss be avoided, but also better threshold and decoding performance, it has more advantages in future communication systems.

Key words: spatial coupled LDPC code; eliminate rate loss; AWGN channel; extrinsic information transfer; BP decoding

1 引言

空间耦合低密度奇偶校验 (Spatially Coupled Low-Density Parity-Check, SC-LDPC) 码是由 L 个完全相同的原模图^[1] (protograph) 低密度奇偶校验 (Low-Density Parity-Check, LDPC) 码耦合形成的链型结构, 已被证明在二元删除信道 (Binary Erasure Channel, BEC) 和二元无记忆对称信道 (Binary Memoryless Symmetric, BMS) 上具有阈值饱和效应^[2,3], 即其置信传播 (Belief-Propaga-

tion, BP) 阈值能够达到对应规则 LDPC 码的最大后验概率 (Maximum A Posterior, MAP) 阈值, 因此空间耦合的方式可以得到接近容量限的码字. 然而, 在耦合过程中额外添加的校验节点造成了一定的码率损失, 使其码率低于原模图单元.

近年来, 针对 SC-LDPC 码的码率方面的主要工作如下: 将边界变量中的小部分设为已知或者仅从一个边界开始耦合的方法被提出^[4] 用来减少 SC-LDPC 码的码率损失, 通过移除最右侧一定数目的校验节点以及

收稿日期: 2019-04-15; 修回日期: 2019-07-28; 责任编辑: 覃怀银

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 61302095, No. 61901182); 福建省自然科学基金 (No. 2018J01096); 泉州市科技计划之高层次人才项目 (No. 2018C108R); 华侨大学研究生科研创新基金资助项目 (No. 17013082035)

其对应的边得到了阈值相同,码率提高的新型 SC-LDPC 码^[5],随后一种速率兼容的 SC-LDPC 码被提出,通过一个高码率的母码可以得到一系列低速率的 SC-LDPC 码^[6],为了减少码率的损失,在构造 SC-LDPC 码的过程中添加额外变量节点^[7,8]的方法被提出,此种方法在提高码率的同时仍保有原结构的阈值特性.

为了完全消除码率损失,本文提出了一种新型的耦合方式,允许变量节点上的边连接到其前一个位置的校验节点,而不是从对应位置的校验节点依次向后连接,得到了没有码率损失的 SC-LDPC 码,通过阈值分析与 BP 译码,表明耦合链长 L 较短时,本文设计的 SC-LDPC 码变体在码率与译码性能方面均优于传统的 SC-LDPC 码.

2 原模图 LDPC 码

原模图通常具有较少的节点,可以派生出任意的 Tanner 图,一个码率 $R = 1 - n_c/n_v$ 的原模图 $G = (V, C, E)$ 包含一组变量节点 $V = \{v_0, \dots, v_{n_v-1}\}$, 一组校验节点 $C = \{c_0, \dots, c_{n_c-1}\}$, 以及一组边 E ^[1]. 通过“复制和置换”的操作可以得到较大的派生图,首先将原模图复制 M 份,然后将连接 M 个变量节点与 M 个校验节点的相同类型的边进行置换,从而得到与初始原模图的度分布相同,码率相同,码长增大 M 倍的派生图,因此 M 称为扩展因子. 图 1(a) 给出了一个变量节点 $n_v = 3$, 校验节点 $n_c = 2$ 的(2,3)原模图,图 1(b) 为将(2,3)原模图进行“ M -lifting”操作,得到派生图^[9]的过程,图 1(c) 表示当“ M -lifting”中的 M 为特定值 3 时的情况.

原模图可以由 $n_c \times n_v$ 的基矩阵 B 表示, $B_{i,j}$ 表示连接变量节点 v_j 与校验节点 c_i 之间边的数量^[9], 通常原模图中的一个变量节点与一个校验节点间可以有多条边连接. 基矩阵 B 中的每个非零元素由 $B_{i,j}$ 个 $M \times M$ 的置换矩阵之和替换, 每个零元素由 $M \times M$ 的全零矩阵替换^[10], 得到 $Mn_c \times Mn_v$ 的校验矩阵 H . 此时原模图 LDPC 码的长度为 $n = Mn_v$, 码率为 $R \geq 1 - Mn_c/Mn_v = 1 - n_c/n_v$. 图 1(a) 中的基矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

将式(1)中的基矩阵进行“ M -lifting”操作可以得到校验矩阵 H 为

$$H = \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & T_{1,3} \\ T_{2,1} & T_{2,2} & T_{2,3} \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中, $T_{i,j}$ 表示一个 $M \times M$ 的置换矩阵.

3 SC-LDPC 码

3.1 传统的 SC-LDPC 码

将 L 个不相交的原模图单元通过一定的边缘扩展规

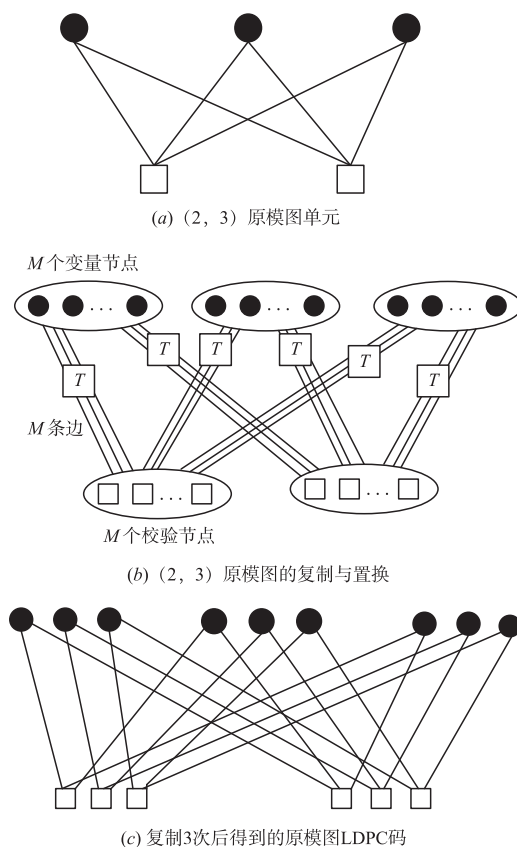


图1 原模图LDPC码的构造过程

则可以得到 (J, K) SC-LDPC 码, J, K 分别为变量节点的度与校验节点的度. 令 $a = \text{gcd}(J, K)$ 表示 J 和 K 的最大公约数, 存在正整数 J' 和 K' 分别满足 $J = aJ', K = aK'$ 且 $\text{gcd}(J', K') = 1$ ^[11], 则原模图单元中 (J, K) SC-LDPC 码的耦合宽度 $w = a - 1$ (只考虑 $a > 1$ 的情况). 假设原模图单元中有 n_v 个变量节点和 n_c 个校验节点, 位置 i 上每个变量节点的 J 条边统一独立的连接到位置为 $[i, \dots, i + w]$ 的校验节点, 同样地, 位置 i 上每个校验节点的 K 条边统一独立的连接到位置为 $[i - w, \dots, i]$ 的校验节点.

图 2 给出了(3,6) SC-LDPC 码的空间耦合过程. 图 2(a) 左侧为一个(3,6)规则 LDPC 码原模图单元, 基矩阵 $B = [3 \ 3]$, 右侧为其 L 个复本, 图 2(b) 表示由边缘展开得到的空间耦合 LDPC 码, 其基矩阵为

$$B_{[0, L-1]} = \begin{bmatrix} B_0 & & & & & \\ B_1 & B_0 & & & & \\ \vdots & B_1 & \ddots & & & \\ B_w & \vdots & \ddots & B_0 & & \\ & B_w & & B_1 & & \\ & & \ddots & \vdots & & \\ & & & B_w & & \end{bmatrix}_{(L+w)n_v \times Ln_c} \quad (3)$$

其中, $B_i, i = 0, 1, \dots, w$ 满足条件 $\sum_{i=0}^w B_i = B$, 当 $w = 2$

SC-LDPC 码进行阈值分析^[15]. 为了进一步阐述,本节做如下定义:

- $I_{\text{ch}}^{(j)}$:第 j 个节点输入时,信道的互信息.
- $I_{A_s}(i,j)$:输入的信息与相应的码字比特间的先验互信息.
- $I_{A_c}(i,j)$:输入的信息与相应的变量节点间的先验互信息.
- $I_{E_c}(i,j)$:变量节点 V_j 传递给校验节点 C_i 的外部信息,该信息由 $b_{s,j}(s \neq i)$ 条边上的信息之和表示. 变量节点的输出等于校验节点的输入,因此 $I_{E_c}(i,j) = I_{A_s}(i,j)$.
- $I_{E_s}(i,j)$:校验节点 C_i 传递给变量节点 V_j 的外部信息,该信息由 $b_{i,s}(s \neq j)$ 条边上的信息之和表示. 校验节点的输出等于变量节点的输入,因此, $I_{E_s}(i,j) = I_{A_c}(i,j)$.
- $I_{\text{APP}}(j)$:通过 V_j 得到的后验概率似然比与码字比特 x_j 之间的互信息.

若一个二进制随机变量 X 满足 $P_r(X = +u) = P_r(X = -u) = 1/2$,且一个连续的随机变量 Y 的均值为 X ,方差 $\sigma^2 = 2u$,则 $J(\sigma)$ 表示二进制输入高斯白噪声信道的容量^[15].

$$J(\sigma) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\sigma^2/2)^2}{2\sigma^2}} \cdot \log_2(1 + e^{-y}) dy \quad (10)$$

SC-LDPC 码的变量节点的数目 $T = L \cdot M \cdot n_r$,校验节点的数目 $Q = L \cdot M \cdot n_c$. 在求解 SC-LDPC 码阈值的过程中,设定阈值的自减步长为 0.01dB,最大迭代次数 $I_{\text{max}} = 5000$,循环终止条件为 $1 - I_{\text{APP}}(j) > 10^{-4}$,具体的求解过程如下:

- (1) 设定初始阈值(信噪比);
- (2) 初始化: $I_{\text{ch}}^{(j)} = J(\sigma_{\text{ch},j})$, $j = 0, \dots, T-1$, 其中

$$\sigma_{\text{ch},j}^2 = 8R \frac{E_b}{N_0} \quad (11)$$

式(11)中: R 为 SC-LDPC 码的码率;

- (3) 变量节点到校验节点的更新: $j = 0, \dots, T-1$; $i = 0, \dots, Q-1$; $I_{A_s}(i,j) = I_{E_c}(i,j)$,

$$I_{E_c}(i,j) = J\left(\sqrt{\sum_{s \neq i} b_{s,j} [J^{-1}(I_{A_s}(s,j))]^2 + [J^{-1}(I_{\text{ch}}^{(j)})]^2}\right) \quad (12)$$

- (4) 变量节点到校验节点的更新: $j = 0, \dots, T-1$; $i = 0, \dots, Q-1$; $I_{A_c}(i,j) = I_{E_s}(i,j)$,

$$I_{E_s}(i,j) = 1 - J\left(\sqrt{\sum_{s \neq j} b_{i,s} [J^{-1}(1 - I_{A_c}(i,s))]^2 + [J^{-1}(1 - I_{\text{ch}}^{(j)})]^2}\right) \quad (13)$$

- (5) APP-LLR 互信息进化: $j = 0, \dots, T-1$,

$$I_{\text{APP}}(j) = J\left(\sqrt{\sum_s b_{s,j} [J^{-1}(I_{A_s}(i,j))]^2 + [J^{-1}(I_{\text{ch}}^{(j)})]^2}\right) \quad (14)$$

(6) 如果满足 $1 - I_{\text{APP}}(j) > 10^{-4}$ 且达到最大迭代次数 $I_{\text{max}} = 5000$,则终止,否则阈值自减 0.01dB,返回步骤(3),继续进行迭代.

通过以上步骤得到空间耦合 LDPC 码的阈值与耦合链长 L 的关系如图 4 所示. 由图 4 可知,在耦合链长 L 较小时,SC-LDPC 码变体结构的阈值更接近(3,6)规则 LDPC 码的 MAP 阈值,随着耦合链长的增加,变体结构与传统结构的阈值差距越来越小直至传统结构的阈值性能优于变体结构. 传统结构的两端存在度分布为 2 的校验节点,然而,变体结构中不存在此类校验节点,因此在耦合链长 L 较短时,传统结构受到此类校验节点的影响较大,阈值性能较差,变体结构不受此类节点的影响,阈值性能较好.

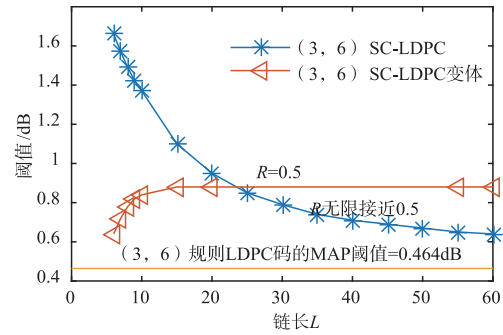


图4 耦合长度 L 与对应的阈值

在已知阈值与耦合链长的情况下,采用 BP 译码算法对码字进行性能仿真,码字的耦合链长 L 分别为 10, 20, 对应的规则(3,6) SC-LDPC 码的码率为 0.4, 0.45, (3,6) SC-LDPC 码变体的码率恒为 0.5, 对应的扩展因子 M 分别为 2000, 1000, 由码长 $C = 2L \cdot M$ 可知,对应的码长均为 40000bit, 得到的仿真图如图 5 所示.

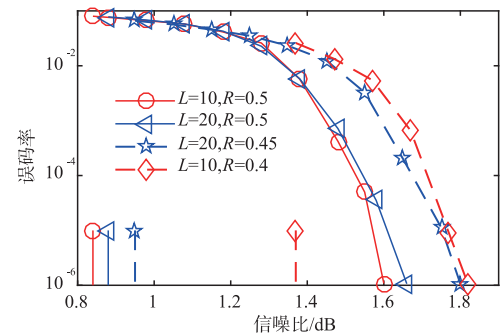


图5 SC-LDPC 码与其变体的译码仿真

图 5 给出了对应的阈值与误码率曲线,从左至右,阈值依次为 0.84, 0.88, 0.95, 1.37dB, 实线为变体结构,虚线

为传统结构,可以看出性能最好的两条误码率曲线分别是耦合链长 $L = 10$ 与耦合链长 $L = 20$ 的 SC-LDPC 码变体结构. 变体结构与传统结构相比更接近容量限,当耦合链长 $L = 10$ 时,大约有 0.2dB 的增益,当耦合链长 $L = 20$ 时,大约有 0.15dB 的增益,随着耦合链长的增加,增益逐渐变小,因此对于长码来说,耦合长度越短,变体结构的性能优势越明显. 此外,对于中、短码是否同样具有类似的性能,需要在未来工作中做进一步的研究.

5 结论

为了避免 SC-LDPC 码在耦合过程中造成的码率损失,本文提出了无需额外添加校验节点的新型耦合方式,允许首尾变量节点的边对称分布,中间位置变量节点的边连接到其前一个位置的校验节点上,得到了完全消除码率损失的 SC-LDPC 码变体结构. 在 AWGN 信道中,采用 EXIT 函数的方法进行阈值分析得出,在一定的耦合长度范围内,链长越小,SC-LDPC 码变体结构的阈值性能越优异,最后通过 BP 译码算法进行译码仿真,结果表明 SC-LDPC 码变体结构的误码率曲线比传统结构更接近香农限.

参考文献

- [1] Thorpe J. Low-density parity-check (LDPC) codes constructed from protographs[J]. *Interplanetary Network Progress Report*, 2003, 42(154): 1–7.
- [2] Kudekar S, Richardson T J, Urbanke R L. Threshold saturation via spatial coupling: why convolutional LDPC ensembles perform so well over the BEC[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2011, 57(2): 803–834.
- [3] Kudekar S, Richardson T J, Urbanke R L. Spatially coupled ensembles universally achieve capacity under belief propagation[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, 59(12): 7761–7813.
- [4] Kudekar S, Méasson C, Richardson T, et al. Threshold saturation on BMS channels via spatial coupling[A]. 2010 6th International Symposium on Turbo Codes & Iterative Information Processing(ISTC) [C]. Brest, France: IEEE, 2010. 309–313.
- [5] Tazoe K, Kasai K, Sakaniwa K. Efficient termination of spatially-coupled codes[A]. 2012 IEEE Information Theory Workshop [C]. Lausanne, Switzerland: IEEE, 2012. 30–34.
- [6] HOU W, LU S, CHENG J. Rate-compatible spatially coupled LDPC codes via repeat-accumulation extension[A]. 2014 8th International Symposium on Turbo Codes and Iterative Information Processing (ISTC) [C]. Bremen, Germany: IEEE, 2014. 87–91.
- [7] Sanatkar M R, Pfister H D. Increasing the rate of spatially-coupled codes via optimized irregular termination[A]. 2016 9th International Symposium on Turbo Codes and Iterative Information Processing (ISTC) [C]. Brest, France: IEEE, 2016. 31–35.
- [8] Kwak H, Kim J, Jong-Seon. Rate-loss reduction of SC-LDPC codes by optimizing reliable variable nodes via expected graph evolution[A]. 2017 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT) [C]. Aachen, Germany: IEEE, 2017. 2930–2934.
- [9] Mitchell D G M, Lentmaier M, Costello D J. Spatially coupled LDPC codes constructed from protographs[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2015, 61(9): 4866–4889.
- [10] 张昭基, 李颖. 适用于突发删除信道的非对称空间耦合 LDPC 码[J]. *西安电子科技大学学报(自然科学版)*, 2017, 44(5): 1–6.
ZHANG Zhao-ji, LI Ying. Asymmetric spatially-coupled LDPC codes for burst erasure channels [J]. *Journal of Xidian University*, 2017, 44(5): 1–6. (in Chinese)
- [11] 刘洋. 低密度奇偶校验码的设计与应用研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2016.
LIU Yang. Design and Applications of Low Density Parity Check Codes [D]. Xi'an: Xidian University, 2016. (in Chinese)
- [12] 张思延. 突发删除信道下空间耦合 LDPC 码结构设计[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2015.
ZHANG Si-yan. Structure Design of SC-LDPC code on Burst Erasure Channel [D]. Xi'an: Xidian University, 2015. (in Chinese)
- [13] Brink T, S. Convergence behavior of iteratively decoded parallel concatenated codes [J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2001, 49(10): 1727–1737.
- [14] Liva G, Chiani M. Protograph LDPC codes design based on EXIT analysis [A]. *IEEE GLOBECOM 2007-IEEE Global Telecommunications Conference* [C]. Washington, DC, USA: IEEE, 2007. 3250–3254.
- [15] HOU W, LU S, CHENG J. Spatially coupled repeater-combiner-convolutional codes [J]. *Communications Letters IEEE*, 2016, 20(1): 21–24.

作者简介



张亚坤 女,1992 年生于河北衡水市. 现为华侨大学信息科学与工程学院硕士研究生. 主要研究方向为空间耦合 LDPC 码和信道编码.
E-mail:1592473187@qq.com



陈 辰 女,1990 年生于福建莆田. 华侨大学信息科学与工程学院讲师,博士学位. 主要研究方向为无线通信和信道编码等.
E-mail:770847349@qq.com



周 林(通信作者) 男,1982 年生于河南南阳. 现为华侨大学信息科学与工程学院副教授,硕士生导师. 主要研究方向为无线通信和信道编码等.
E-mail:linzhou@hqu.edu.cn



贺玉成 男,1964 年生于山西太原. 现为华侨大学信息科学与工程学院教授,博士学位. 主要研究方向为无线通信和信道编码等.
E-mail:yucheng.he@hqu.edu.cn